

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について問題文の にあてはまる適当なものを，
解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

Ⅰ xy 座標平面上の点 $A(0, -1)$ を通る直線 ℓ が曲線 $C: x^2 - y^2 = 1$ と 2 つの共有点をもつとする。

直線 ℓ の傾きを m とすると，この直線の方程式は $y =$ ア である。

直線 ℓ が曲線 C と異なる 2 つの共有点をもつことから， m がとりうる値の範囲は イ $< m <$ ウ から $m =$ エ を除いたものである。

曲線 C と直線 ℓ の 2 つの共有点を $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$ とする。ただし， $x_1 < x_2$ とする。このとき， $x_1 + x_2$ ， $x_1 x_2$ はそれぞれ m の式で表すと
 $x_1 + x_2 =$ オ ， $x_1 x_2 =$ カ である。また，曲線 C の点 P_1 における接線を ℓ_1 ，点 P_2 における接線を ℓ_2 とする。 ℓ_1 は直線 $x_1 x - y_1 y = 1$ で表され， ℓ_2 も同様にして得られる。これより， ℓ_1 と ℓ_2 の交点 $P_0(x_0, y_0)$ は m を用いて

$$(x_0, y_0) = \left(\text{キ} \text{ } , \text{ク} \text{ } \right)$$

と表すことができる。特に， $\angle P_0 P_1 P_2 = 90^\circ$ であるとき， $m =$ ケ である。

II

〔1〕 座標空間において、原点 O を通る平面 α を固定し、 r を正の実数とする。平面 α 上の点 O を中心とする半径 r の円周上に、点 A, B, C, D, E, F をこの順で正六角形の頂点となるようにとり、 A, B の座標を $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする。

(a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \boxed{\text{ア}}$ である。 $\overrightarrow{OC}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表すと、 $\overrightarrow{OC} = \boxed{\text{イ}}$ となり、 $\overrightarrow{OF}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表すと、 $\overrightarrow{OF} = \boxed{\text{ウ}}$ となる。また、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を r を用いて表すと、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{\text{エ}}$ である。特に、この内積の値が整数であるとき、 r のとりうる最小値は $\boxed{\text{オ}}$ である。

(b) A のすべての成分が整数であるとする。これを満たすものの中で $r = \boxed{\text{オ}}$ となるような A のとり方は全部で $\boxed{\text{カ}}$ 通り存在する。特に、 a_1, a_3 が共に正であるものは $(a_1, a_2, a_3) = \boxed{\text{キ}}$ である。

(c) A, B のすべての成分が整数であるとする。 $(a_1, a_2, a_3) = \boxed{\text{キ}}$ であるとき、 B のとり方は全部で $\boxed{\text{ク}}$ 通りである。特に、 $\overrightarrow{AB}$ が xy 平面と平行ならば、 $(b_1, b_2, b_3) = \boxed{\text{ケ}}$ である。

〔2〕 座標空間上にあるすべての成分が整数であるような正六角形について、そのとりうる面積の最小値は $\boxed{\text{コ}}$ である。

Ⅲ 0 でない実数からなる数列 $\{a_n\}$ に対して, 数列 $\{S_n\}, \{T_n\}$ を

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^n a_k^3$$

により定める。各 $n = 1, 2, \dots$ に対して $S_n^2 = T_n$ が成り立つとする。

$S_1^2 = T_1$ より, $a_1 = \boxed{\text{ア}}$ である。また, a_2 がとりうる値を求めると,
 $a_2 = \boxed{\text{イ}}$ である。 $n \geq 2$ のとき, $S_n^2 - S_{n-1}^2 = T_n - T_{n-1} = \boxed{\text{ウ}}$ である
 から, $S_n + S_{n-1} = \boxed{\text{エ}}$ である。ただし, $\boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{エ}}$ は数列 $\{a_n\}$ の
 第 n 項 a_n のみを用いた式である。同様にして, $S_{n+1} + S_n$ を数列 $\{a_n\}$ の第
 $(n+1)$ 項で表すことにより, $S_{n+1} - S_{n-1}$ を a_n, a_{n+1} を用いて表すことができる。
 一方, $S_{n+1} - S_{n-1} = a_{n+1} + a_n$ も成り立つことから, a_n と a_{n+1} に関する関係式が
 得られる。これを整理すると, $a_{n+1} + a_n = \boxed{\text{オ}}$ または $a_{n+1} - a_n = \boxed{\text{カ}}$
 が成り立つことがわかる。このことと, $a_1 = \boxed{\text{ア}}, a_2 = \boxed{\text{イ}}$ より, すべ
 ての自然数 n について a_n が整数であることがわかる。

〔1〕 $a_n a_{n+1} < 0$ ($n = 1, 2, \dots$) が成り立つとき, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求め
 ると, $a_n = \boxed{\text{キ}}$ である。

〔2〕 $a_n a_{n+1} > 0$ ($n = 1, 2, \dots$) が成り立つとき, 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求め
 ると, $a_n = \boxed{\text{ク}}$ である。このとき, $U_n = \sum_{k=1}^n a_k^2$ とおくと,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n^2}{S_n T_n} = \boxed{\text{ケ}}$$

である。

〔3〕 n が 4 の倍数のとき $a_n < 0$, そうでないとき $a_n > 0$ が成り立つとする。こ
 のとき, $a_4 = \boxed{\text{コ}}$ である。また, $a_n = 100$ となるのは $n = \boxed{\text{サ}}$ のと
 きである。

Ⅳ 実数全体で定義された微分可能な関数 $f(x)$ について、 xy 座標平面上のグラフ $y = f(x)$ を考える。グラフ上の点 $P(t, f(t))$ における $y = f(x)$ の法線を ℓ とする。 ℓ 上の点で P からの距離が 1 である 2 点のうち、 y 座標が大きい方を Q とする。 t が実数全体を動くときの Q の軌跡を C とする。 a を正の定数とする。

〔1〕 $f(x) = a$ のとき、 Q の座標を a, t を用いて表すと、ア である。このとき、軌跡 C は実数全体で定義された関数 $g(x) =$ イ $$ により $y = g(x)$ と表される。

〔2〕 $f(x) = ax$ のとき、 Q の x 座標を a, t を用いて表すと、ウ である。このとき、軌跡 C は実数全体で定義された関数 $g(x) =$ エ $$ により $y = g(x)$ と表される。

〔3〕 $f(x) = x^2$ とする。このとき、 Q の x 座標が 0 となる t は全部でオ 個存在し、その中で最小なものは $t =$ カ $$ 、最大なものは $t =$ キ である。カ $\leq t \leq$ キ $$ の範囲で Q の x 座標が最大となるのは、 $t =$ ク のときである。

〔4〕 $f(x) = ax^2$ とする。このとき、軌跡 C が実数全体で定義された関数 $g(x)$ により $y = g(x)$ と表される、つまり各実数に対してそれを x 座標にもつ C 上の点が唯一つ決まるための a が満たす必要十分条件は、ケ である。