

数 学

次のⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの設問について，問題文の にあてはまる適当なものを解答用紙の所定の欄に記入しなさい。ただし，近似値を記入してはいけません。分数を記入する際は，既約分数を記入しなさい。また，根号を含む分数を記入する際は，分母を有理化した分数を記入しなさい。

Ⅰ

〔1〕 次の連立方程式の解を求める。

$$\begin{cases} \log_3(x+2) - 2\log_9(y+5) = -1 & \cdots \cdots \text{①} \\ 2^y - 7 \cdot 2^{x+1} - 12 = 0 & \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

①より，関係式 $y = \text{ア}$ が得られる。

この関係式を用いて②において $t = 2^x$ とすると，次の t に関する3次方程式が得られる。

$$t^3 + \left(\text{イ} \right) = 0$$

①で x の条件より， $t > \text{ウ}$ であり， $t = \text{エ}$ が解である。

したがって，連立方程式の解は

$$x = \log_2 \left(\text{オ} \right), \quad y = \log_2 \left(\text{カ} \right) \text{ である。}$$

〔2〕 関数 $f(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^2$ について考える。以下の ク，

ケ，サ は正の整数で答えよ。

$$f(x) = \text{キ} \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{\text{ク}} \right) \text{ と変形し，} 2x \text{ を用いて表すと}$$

$$f(x) = -\cos \left(2x + \frac{2\pi}{\text{ケ}} \right) + \text{コ}$$

となる。

さらに正弦を用いて表すと

$$f(x) = \sin \left(2x + \frac{\pi}{\boxed{\text{サ}}} \right) + \boxed{\text{コ}}$$

となる。

したがって、 $y = f(x)$ のグラフは、 $y = \sin 2x$ のグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{シ}}$ ， y 軸方向に $\boxed{\text{ス}}$ だけ平行移動したグラフである。ただし、 $-\frac{\pi}{2} \leq \boxed{\text{シ}} < \frac{\pi}{2}$ とする。

- 〔3〕 次の表は、国語（ X ）と数学（ Y ）の10点満点のテストを10人の生徒が受け、その得点をまとめたものである。ただし、 a, b は0以上の整数で $a \neq 10$ である。

表

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
国語（ X ）の得点	a	b	a	10	10	a	b	b	10	b
数学（ Y ）の得点	a	10	10	10	a	a	10	a	10	a

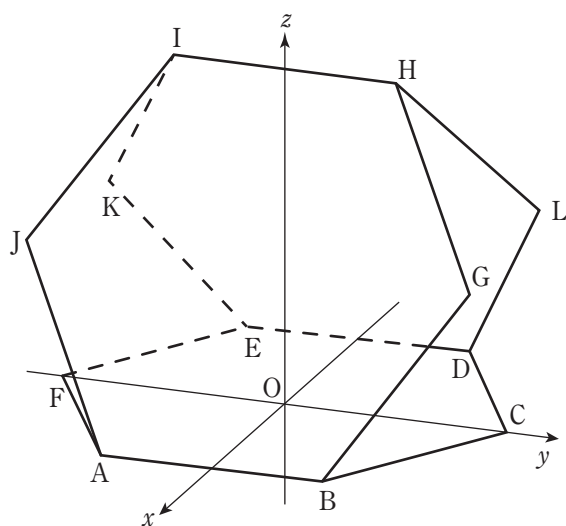
国語（ X ）と数学（ Y ）の得点の平均点は等しく、国語（ X ）の得点の中央値は8であった。国語（ X ）と数学（ Y ）の得点の平均点が等しいことより、 a を用いて b を表すと $b = \boxed{\text{セ}}$ となる。 a, b の大小関係を考えると、国語（ X ）の得点の中央値が8より、 $a = \boxed{\text{ソ}}$ ， $b = \boxed{\text{タ}}$ とわかる。したがって、国語（ X ）の得点の分散 s_X^2 は、 $s_X^2 = \boxed{\text{チ}}$ ，数学（ Y ）の得点の分散 s_Y^2 は、 $s_Y^2 = \boxed{\text{ツ}}$ となる。

Ⅱ 2つの曲線 $C_1: y = x^3 - x$, $C_2: y = 3ax^2 - x + b$ がある。ここで, a, b は定数で $a > 0$, $b < 0$ とする。

曲線 C_1 と曲線 C_2 が共有点を2つもつとき $b = \boxed{\text{ア}}$ である。2つの共有点 P と Q の座標は P ($\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$) と Q ($\boxed{\text{エ}}$, $\boxed{\text{オ}}$) である。ただし, x 座標が大きい方の共有点を点 P とする。点 P における2つの曲線 C_1 と C_2 の接線の傾きはどちらも $\boxed{\text{カ}}$ なので, 接線 ℓ_1 の方程式は $y = \left(\boxed{\text{カ}} \right) x + \left(\boxed{\text{キ}} \right)$ である。2つの曲線 C_1 と C_2 に囲まれた図形の面積 S_1 は $\boxed{\text{ク}}$ である。

さらに, $a = \frac{1}{2}$ とする。このとき, 点 P を通り接線 ℓ_1 と直交する直線 ℓ_2 の方程式は $y = \left(\boxed{\text{ケ}} \right) x + \left(\boxed{\text{コ}} \right)$ である。曲線 C_2 と直線 ℓ_2 で囲まれた図形の面積 S_2 は $\boxed{\text{サ}}$ である。

Ⅲ 空間において、図のように1辺の長さが a （ただし、 $a > 0$ ）の3つの正六角形 $ABCDEF$, $ABGHIJ$ および $DEKIHL$ が、それぞれ線分 AB , 線分 DE および線分 HI を共有して立体を作っている。正六角形 $ABCDEF$ は xy 平面上にあり、点 C の座標は $(0, a, 0)$, 点 F の座標は $(0, -a, 0)$ であるとする。この3つの正六角形で作られた立体を y 軸方向から見ると正三角形に見える。



図

このとき点 I および点 G の座標はそれぞれ

I (ア , イ , ウ) , G (エ , オ , カ) である。

$\vec{JC}$ と $\vec{KC}$ との内積は $\vec{JC} \cdot \vec{KC} =$ キ であり、 $\vec{JC}$ と $\vec{KC}$ のなす角を θ とすると、 $\cos \theta =$ ク である。

また、この3つの正六角形で作られた立体に $\triangle CGL$ や $\triangle FJK$ などの8つの三角形を加えて十一面体を作る。この十一面体は zx 平面に平行で点 G を含む底面を持った三角柱から、6つの合同な三角錐を除いた立体であるから、この十一面体の体積は ケ である。また、この十一面体に外接する球の体積は コ である。

直線 IH 上の点 Q と直線 BC 上の点 R について、線分 QR が直線 IH , 直線 BC の両方に垂直であるとき、線分 QR の長さは サ である。

Ⅳ 3つの野球チーム A, B, C がある。これらの3チームで、2チームごとの野球の試合を行う。試合に勝ったチームは、前の試合がなかったチームと試合をしていき、3連勝したチームが優勝として、いずれかのチームが優勝したら試合は終了する。第1試合はAチームとBチームとが試合をするものとする。

AチームがBチームに勝つ確率は常に一定で p (ただし, $0 < p < 1$) であり, Cチームが他のチームに勝つ確率は常に一定で $\frac{1}{2}$ であるとする。ただし, 引き分けはないものとする。

ある試合において, X を勝利チーム, Y を敗北チーム, k を勝利チームの連勝数として, 試合後の状態を (X, Y, k) と表すと, 第1試合でAチームが勝った場合は $(A, B, 1)$, Bチームが勝った場合は $(B, A, 1)$ となる。このとき, 第2試合後の状態が $(A, C, 2)$ である確率は ア, $(C, A, 1)$ である確率は イ である。また, 第3試合までAチームが3連勝したとき, 第3試合後の状態は $(\text{ ウ }, \text{ エ }, \text{ オ })$ と表せ, 第3試合でAチームが優勝する確率は カ である。

また, 第4試合後の状態が $(A, B, 1)$ である確率は キ である。次に, 第4試合でAチームが優勝する確率は ク, 第5試合でAチームが優勝する確率は ケ である。第5試合でAチームが優勝した場合, 第2試合でBチームが勝っている確率は コ である。

ここで, n を自然数とする。第 n 試合後の状態が $(B, A, 2)$ であるとき, 第 $(n + 4)$ 試合でAチームが優勝する確率は サ である。