

I. 導関数の定義

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

に従って、次の関数の1階の導関数を導きなさい(計算過程を示せ)。

$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

II. 以下の式において、 y の x に関する1階の導関数と2階の導関数を求めよ。ただし、 e は自然対数の底とする。

$$y = e^x \cos x$$

III. 次の定積分を求めよ。

(1)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx$$

ただし、 m, n は正の整数とする。

(2)

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx$$

IV. 次の微分方程式を解け。

(1)

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

(2)

$$\frac{dy}{dx} + y = x$$

V. 行列 A, B が

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

であるとき、以下の問いに答えよ。

(1) 行列の積 $C = AB$ 、および $D = BA$ を求めよ。

(2) 行列 C の固有値を求めよ。

(3) 各固有値の固有ベクトルを求めよ。

VI. 変数 θ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$) で定義されるベクトル $\mathbf{a}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 1 \end{pmatrix}$ 、およびベクトル $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ がある。

このとき、以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\mathbf{a}(\theta)$ とベクトル \mathbf{b} が直交するときの θ を θ_0 とする。この θ_0 を求めよ。

(2) (1)で求めたベクトル $\mathbf{a}(\theta_0)$ およびベクトル \mathbf{b} と垂直な単位ベクトル \mathbf{e} を求めよ。

VII. 次の複素数 z について下記の問いに答えよ。ただし、 i は虚数単位とする。

$$z = \frac{2}{1-i}$$

(1) 複素数 z を $z = a + bi$ の形で記載せよ。ただし、 a, b は実数とする。

(2) 複素数 z の極形式を求めよ。ただし、偏角 θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。

(3) z^8 を計算せよ。